**Лекция 3 План лекции**

1. **Понятие отношения**
2. **Определение отношения**
3. **Область определения и множество значений**
4. **Срез отношения через элемент**
5. **Способы задания бинарных отношений**
6. Задание перечислением и предикатом
7. Задание графом
8. Задание матрицей (таблично)
9. **Операции над отношениями** 
   1. Объединение, пересечение, разность, дополнение
   2. Операции объединения и пересечения произвольных семейств отношений
10. **Дополнительные операции** 
    1. Обратное отношение
    2. Композиция отношений (Умножение отношений)
11. Свойства композиции отношений

**Понятие отношения**

Отношение между парой объектов называется бинарным. Бинарное отношение используется для указания характера вида связи между парой объектов, рассматриваемых в определенном порядке. При этом отношение дает критерий для отличия одних упорядоченных пар от других. Таким образом, понятие «отношения» представляет собой дальнейшее развитие понятий упорядоченного множества, «соответствия» и «отображения».

В математике для обозначения связи между объектами или понятиями часто пользуются термином «отношения».

Пример. Такие неполные предложения (или так называемые предикаты, утверждения) могут быть рассмотрены как отношения:

* *X* меньше (или больше), чем *Y* ,
* *X* выше (или ниже), чем *Y* ,
* *X* делится на *Y* ,
* *X* происходит раньше (или позже), чем *Y* ,
* *X* включается (или входит) в *Y* ,
* *X* параллельно (или перпендикулярно) Y,
* *X* равно (или эквивалентно) *Y* ,
* *X* является братом *Y* ,
* *X* связан (электрически или иным образом) с *Y* и т. д.

**Определение отношения**

***Отношением*** *R*множеств*X*и*Y*называется произвольноеподмножество *X Y* . Если *x* , *y R*, это записывают как *xRy* ; при этом

говорят, что *x* и *y* находятся в отношении *R*, или просто, что *x*

***относится*** к*y*. Если*X Y*, то отношение есть подмножество*X X*.Такое отношение называют ***бинарным отношением*** на *X* .

Примеры бинарных отношений.

1. Все множество *X Y* есть отношение множеств *X* и *Y* .
2. Если *X* — множество действительных чисел, то

*a* , *b X X a* 2 *b*24



является бинарным отношением на *X* .

1. Пусть *X* — множество товаров в магазине, а *Y* — множество действительных чисел. Тогда *a* , *b X Y a priceb* — отношение



множеств *X* и *Y* ***.***

4. Пусть *X* — множество женщин, а *Y* — множество мужчин, тогда { *a* , *b b* является мужем *a* } есть отношение множеств *X* и *Y* .



1. Если *A* — множество людей, то

{ *a* , *b A*2 *b* является родственником *a* }



есть бинарное отношение на *A* ***.***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Область определения и множество значений** |  |  |
| ***Область определения*** отношения*R*на*X* | и *Y* | есть множество всех |
| *x X* таких, что для некоторых *y Y* | имеем | *x* , *y R*. Другими |

словами, область определения *R* есть множество всех первых координат упорядоченных пар из *R*.

***Множество значений*** отношения*R*на*X*и*Y*есть множество всех

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *y Y* таких, | что *x* , *y R* | для | некоторого *x X* . Другими | словами, |
| множество значений *R* есть множество всех вторых координат | | | | |
| упорядоченных пар из *R*. | |  |  |  |
| С каждым | отношением | *R* | на *X Y* связано отношение | *R* 1на |
| *Y X* . |  |  |  |  |

**Способы задания бинарных отношений**

1. Бинарное отношение можно задать, перечисляя все входящие в него пары (если отношение состоит из конечного числа пар) или указав общее свойство пар, принадлежащих этому отношению, т. е. предикатом (вспомните способы задания множеств).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пример. Пусть дано множество*Xp*, *r* , *s*, *q* . | | | | | | | | | |  | Зададим | | отношение | | |  |
| *R X X* перечислением пар *R* |  | *p*, *r* | , |  | *s* , *q* | , |  | *r* , *p* | , |  | *p*, *p* , | *s*, *r* | , | *p*, *s* |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Пример. Пусть дано *N* – множество натуральных чисел. Зададим отношение, указав общее свойство пар, принадлежащих отношению:

*R*1 *n* , *m N N n* является делителем *m*



2. Способ задания бинарного отношения с помощью графа. Пусть *R* – бинарное отношение на множестве *X* . Изобразим элементы множества *X* в виде

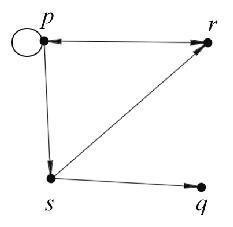
точек на плоскости (их называют вершинами графа). Для двух точек *x* *i* , *xj*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| проводим стрелкуиз *xi* | в *xj* тогда и только тогда, когда | *x i* , *x j* | *R*. При |
| этом, если одновременно | *x i* , *x j R* и *x j* , *x i R* то | точки | *xi* и *xj* |

соединяются стрелкой , а если *x* *j* , *x* *j* *R* , то в точке *xj* изображается петля.

На рисунке изображен граф бинарного отношения

*R p*, *r* , *s* , *q* , *r* , *p* , *p*, *p* , *s*, *r* , *p*, *s* .



3. Способ задания бинарного отношения с помощью булевых матриц. Пусть

*R X Y* , где *X x* 1, *x* 2, *x* 3, ...,*xn* ; *Y y*1, *y* 2, *y* 3, ...,*ym* . Рассмотрим *n m* -матрицу (таблицу), в которой в первый столбец выписаны элементымножества *X* , а в начальную строку – элементы множества *Y* . На пересечении

строки элемента *xi* и столбца элемента *yj* записывается 1, если пара *x* *i* , *y* *j* *R*,

и 0 – в противном случае. Такая таблица называется **булевой матрицей** **отношения.** Булева матрица отношения

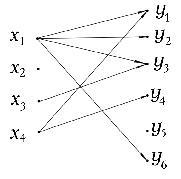
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *R* |  | *p*, *r* | , |  | *s* , *q* | , |  | *r* , *p* | , | |  | *p*, *p* | , | | *s*, *r* | | , | *p*, *s* | |  | имеет вид: | |  |
|  |  |  |  |  |  |  | |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *R* | |  | *p* |  |  | *q* |  | *r* |  | *s* |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | p | |  | 1 |  |  | 0 |  | 1 | | 1 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *q* | |  | 0 |  |  | 0 |  | 0 | | 0 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *r* |  |  | 1 |  |  | 0 |  | 0 | | 0 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *s* |  |  | 0 |  |  | 1 |  | 1 | | 0 |  |  |

**Срез отношения через элемент**

Пусть *R* – произвольное бинарное отношение между элементами множеств *X* и *Y*, *x X* . Множество тех элементов, с которыми элемент *x* находится в отношении *R*, называется**срезом**(или**сечением)**отношения *R* через элемент *х* и обозначается *R*(*x*). Если бинарное отношение R представлено с помощью графа, то *R*(*x*) состоитиз тех вершин, в которые из вершины *х* идет стрелка. Подчеркнем, что срез отношения через элемент – это некоторое множество, которое может содержать несколько элементов, один элемент и ни одного элемента (пустое).

**Пример задания среза отношения** *R* **через элемент** *xi*

Пусть даны множества *X* *x*1 , *x*2 , *x*3 , *x*4 и *Y* *y*1 , *y* 2 , *y*3 , *y* 4 , *y*5 , *y*6 и отношение *R*  *X* *Y* , заданное графом.



Срез отношения *R* через элемент *x*1 : *R*  *x*1 *y*1 , *y* 2 , *y*3 , *y*6 Срез отношения *R* через *x*2 : *R*  *x*2 

Срез отношения *R* через *x*3 : *R*  *x*3  *y*3

Срез отношения *R* через *x*4 : *R*  *x* 4 *y*1 , *y*4

**Операции над отношениями**

Так как бинарные отношения представляют множества (пар), то к ним применимы понятия равенства, включения, а также операции объединения, пересечения и дополнения.

Для двух бинарных отношений *R* и *S* определим такие операции:

**Включение** *R**S*понимается таким образом, что всякая упорядоченная параэлементов, принадлежащая отношению *R*, принадлежит и отношению *S*.

**Равенство** *R**S*означает, что отношения*R*и*S*состоят из одних и тех жеупорядоченных пар.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Объединение** | *R* *S* | отношений *R* и *S* состоит из упорядоченных пар, |
| принадлежащих хотя бы одному из этих отношений. | | |
| **Пересечение** | *R* *S* | отношений *R* и *S* есть новое отношение, состоящее из |

упорядоченных пар, принадлежавших обоим отношениям одновременно.

**Разность** *R**S*отношений*R*и*S*есть множество упорядоченных пар,принадлежащих отношению *R* и не принадлежащих отношению *S*.

**Дополнение.** Если*R*– бинарное отношение между элементами множеств*X*и*Y*, то его**дополнением**(относительно *X* *Y* ) называется разность*X* *Y*  *R*

**Операции объединения и пересечения произвольных семейств отношений**

Если *Ri* *i**I* – семейство отношений, то **объединение этого семейства** есть

отношение *Ri* , состоящее из упорядоченных пар, принадлежащих хотя бы

*i**I*

одному из отношений *Ri* .

**Пересечением этого семейства –** отношение *Ri* , состоящее из

*i**I*

упорядоченных пар, принадлежащих всем отношениям *Ri* .

**Дополнительные операции**

Для отношений вводятся некоторые **дополнительные операции**, которые связаны с их специфической структурой, проявляющейся в том, что **все элементы** **отношений суть упорядоченные пары**. Рассмотрим две такие операции.

**1. Обратное отношение**

Если в каждой упорядоченной паре, принадлежащей отношению *R* поменять местами первую и вторую компоненту, то получим новое отношение, которое

называется **обратным** для отношения R и обозначается через *R*1 . Например, для отношения *R*

*R* *p* , *r* ,*s* , *q* ,*r* , *p* ,*p* , *p* ,*s* , *r* ,*p* , *s* 

обратное отношение *R*1 имеет вид:

*R* 1*r* , *p* ,*q* , *s* ,*p* , *r* ,*p* , *p* ,*r* , *s* ,*s* , *p*

Ясно, что тогда и граф отношения *R*1 получается из графа отношения *R* путем переориентации всех стрелок; если же отношение *R* задано с помощью булевой матрицы, то, поменяв в ней строки и столбцы, получим булеву матрицу

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| отношений *R*1 . | | | *X* *Y* . Тогда отношение *R*1на |  |
| Пусть *R*  *X* *Y* есть отношение на | | |  |
| *Y*  *X* определяется следующим образом: | | | |  |
| *R* 1*y* , *x*  |  | *x* , *y* *R* . | |  |
|  |  |
|  |  |  |  |  |

Другими словами, *y* , *x*  *R*1 тогда и только тогда, когда *x* , *y*  *R* или, что равносильно, *yR* 1*x* тогда и только тогда, когда *xRy* ***.***

Отношение *R*1 называется ***обратным отношением*** к данному отношению *R* ***.***

**Пример.**

Пусть *R* 1,*r*  ,1,*s*  ,3,*s*, тогда *R* 1 *r* ,1,*s* ,1,*s*,3.

Пусть *R* ***=***{ *a* , *b*  *b* является мужем *a* }, тогда *R*1 ***=***{ *b*, *a a* является женой *b* }



Пусть

*R* = {*a* , *b*  *b* является родственником *a* }, тогда *R*  *R*1



Пусть

* 1. ***—*** отношение*a*,*b**a*2*b*24, тогда также*R*1*R*.

1. **Композиция отношений (Умножение отношений)**



Пусть *R*  *X* *Y* ***—*** отношение на *X* *Y* , а *S* *Y* *Z* — отношение на *Y* *Z* .

***Композицией*** отношений*S*и*R*называется отношение

*T*  *X* *Z* ,

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| определенное таким образом: | | | | | | | |  |  | *y* *Y* , что*x* , *y* *R* и*y* , *z* *S* }. | | | | | | | |  |
| *T* {*x* , *z*  |  | существует такой элемент | | | | | | | |  |
|  |  |
| Это множество обозначается *T*  *S R* . | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |
| **Пример.** | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Пусть *X* 1,2,3, *Y* *a* , *b* и *Z* **, ** ,**, **. | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |
| Также заданы отношения | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *R*  *X* *Y* и *S* *Y* *Z* . *R*  | | | | | 1,*a* | | , | 2,*b* | , | 3,*b* | , |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *S* *a* , ** ,*a* , ** ,*b* , ** ,*b*, ** , | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Тогда *S R* 1,** ,1, ** ,2,** ,2,** ,3,** ,3,**  поскольку | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| из 1,*a*  *R* и*a* , ** *S* следует, что 1,** *S R* , | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |
| из 1,*a*  *R* и*a* , ** *S* следует, что 1, ** *S R* , | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |
| ….. | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| из 3,*b*  *R* и*b*, ** *S* следует, что 3, ** *S R* . | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |
|  |  |  |  | **Свойства композиции отношений** | | | | | | | | | | | | | |  |
| Композиция | | | отношений | | | **ассоциативна**; | | | | | | | | | | т. е., | если *X* ,*Y* , *Z* ,D — |  |
| множества и | | | если | *R*  *X* *Y* , | | | | | |  |  | *S* *Y* *Z* | | | | и | *T*  *Z* *D* тогда |  |

*R* *S T* *R S*  *T* .